SU LA
TEORIA DELLA PROBABILITÀ

Osservazioni

DEL M. E. PROF. GIUSTO BELLAVITIS

lette nell' adunanza dell'i. r. Istituto veneto di scienze, lettere ed arti del giorno 23 marzo 1857.

(Estr. dal Vol. II, Serie III degli Atti dell' Istituto stesso.)

——o——

1. Il calcolo delle probabilità fu grandemente promosso dal lato analitico, ed anzi lo si considerò come un oggetto, che mette a prova le più difficili speculazioni di una parte dell' algebra; forse che non furono ancora abbastanza discussi alcuni dei suoi principii teorici, dai quali dipende la applicabilità della dottrina, e quindi anche la sua utilità. — Le altre parti della matematica pongono a calcolo le nostre cognizioni, la teoria delle probabilità pone a calcolo la nostra ignoranza; e quando si pensi alle dubbiezze, che in ogni argomento s' incontrano, non si giudicherà per certo che il campo meno esteso sia quello spettante alla teoria delle probabilità.

2. Le applicazioni ai giuochi d' azzardo sono quanto facili in riguardo alla teoria fondamentale, altrettanto futili per lo scopo. È cosa ovvia giudicare sì *a priori* che *a posteriori* delle disastrose conseguenze dei giuochi, ma un calcolo poco giova a sottrarre gli uomini dalle loro passioni. —

L' applicazione veramente importante è quella alla discussione delle osservazioni, che danno approssimatamente cercati valori.

3. L'uomo ha una grande propensione per porsi a centro dell' universo, e credere che tutto gli sia dipendente; e quando egli trova in sè qualche difetto egli è disposto ad attribuirlo altrui: così quando egli non sa se una cosa avverrà o no, piuttosto di esporre la propria ignoranza, egli preferisce dire che la cosa è probabile; e perchè egli non conosce le leggi immutabili, da cui quella cosa dipende, egli suppone che le leggi non esistano, e che l' avvenimento dipenda da quella chimera che dicesi il *caso*. Questa falsa locuzione di dire che una cosa è *probabile*, mentre doveva dirsi che non si conoscono motivi sufficienti per giudicare intorno ad essa, ha, per quanto mi pare, una perniciosa influenza sulla teoria della probabilità.

4. Un principio fondamentale del raziocinio è quello di giudicare per *analogia:* quando si vide avvenire una cosa, si crede ed anzi, dirò meglio, si tien per fermo che la stessa avverrà in seguito; e soltanto dopo aver osservato che non sempre ciò si verifica, quella irresistibile propensione si cangia in dubbio; appunto perchè lo stesso principio d' analogia ci fa credere che se la cosa si mutò, possa ancora mutarsi. Così il principio d' analogia, che è principio d' ogni scienza, è fondamento anche del dubbio. Questo principio è necessariamente una legge primitiva ed innata, poichè per quanti fatti eguali fossero conservati dalla memoria non si potrebbe giammai dedurne alcun giudicio sui fatti futuri, se il raziocinio non avesse questa facoltà di giudicare per analogia.

5. Alcuni vollero sostenere che l' uomo non sia suscettibile di certezza: questo è od un assoluto errore, od una

questione mal posta. La certezza, anzichè rara, può dirsi lo stato abituale dell'uomo; che poi quella cosa di cui egli è certo sia vera, questa è una questione affatto differente. Niuno vorrà negare che qualche volta almeno la certezza sia conforme al vero, come niuno vorrebbe per certo sostenere che la certezza e la verità sieno sempre compagne. — È poi un fatto che quando un uomo abituato a raziocinare esamina i motivi della propria certezza gli sorgono dei dubbii, a cui prima egli stesso non avea fatto attenzione: peraltro credo che non di rado egli conservi il proprio convincimento, e quel dubbio sia soltanto un lusso di ragionamento, col quale conchiude che altri potrebbe dubitare, ma egli in fatto non dubita.

6. Del resto è vero che l'uomo irriflessivo crede quasi sempre che una cosa sia certa o impossibile, il che significa soltanto che egli non prova alcun dubbio; pure quando si esamina attentamente lo stato delle sue cognizioni si trovano in esse dei motivi di dubitare: sono tali motivi che, posti a calcolo, danno la così detta probabilità dell'avvenimento, che è invece lo stato di dubbio, in cui dovrebbe trovarsi chi ha quelle imperfette cognizioni. Cioè la probabilità non è una qualità dell'avvenimento, il quale è di sua natura certo od impossibile, ma è puramente subbiettiva e perciò differente da un uomo ad un altro, quando differenti sieno le loro cognizioni.

7. Uno dei cardini della teoria delle probabilità è il teorema del Bernoulli, pel quale se sieno $p, q = 1 - p$ le probabilità di due avvenimenti opposti, la probabilità che in n prove il primo avvenimento succeda m volte ed il secondo $n-m$ è uguale al termine

$$\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-m+1)}{1.2\ldots\ldots m}p^m q^{n-m}$$

dello sviluppo di $(p+q)^n$. Ne è corollario che in un grandissimo numero di prove sia sommamente probabile che il rapporto del numero delle volte in cui accade il primo avvenimento al numero totale delle prove differisca dalla probabilità p di una frazione numerica, che può divenir piccola quanto si voglia, purchè si faccia abbastanza grande il numero delle prove. — Su ciò non mi pare che siasi fatta un' importantissima osservazione, o se pure fu fatta essa non fu sempre applicata; perlochè si credette di poter dare al teorema del Bernoulli un' estensione molto maggiore di quella di cui è suscettibile. — Nel teorema predetto e nel suo corollario deve, a mio credere, intendersi che la frazione p sia non l' apprezzamento delle imperfette cognizioni di un osservatore, bensì qualche cosa di proprio dell' avvenimento stesso; credo opportuno di darle il nome speciale di *proclività* dell' avvenimento, poichè il non distinguerla dalla probabilità darebbe origine a gravissimi errori, quando alcuno, dopo avere rettamente dedotta dalle proprie cognizioni la probabilità di un avvenimento, credesse di potervi applicare il predetto corollario, come se quella probabilità fosse la vera proclività. — In alcuni casi affatto speciali, e che s' incontrano quasi unicamente nei giuochi, la *proclività* si stabilisce *a priori* (come per esempio se si tratti di un dado perfettamente regolare, o di un' urna contenente palle uguali, ec.). Altrimenti la proclività non potrà desumersi se non che *a posteriori*, e sarà uguale al rapporto tra il numero dei casi favorevoli all' avvenimento al numero totale dei casi; ma determinata in questo modo essa lascierà qualche dubbio sul suo vero valore, e perciò le conseguenze del precedente corollario non saranno più assolute. Dal che apparisce ancor più palesemente la necessità di distinguere la proclività che è propria dell' avvenimento, e

la probabilità che appartiene all' osservatore; quest' ultima, quand'è giustamente dedotta da tutte le sue cognizioni, è assoluta, nè ammette alcun dubbio; invece la proclività calcolata *a posteriori* lascia dubbioso se essa sia veramente quale si manifesterebbe in un numero infinito di prove, se sia costante o muti periodicamente, ecc. Non potendo conoscere la vera proclività, dobbiamo studiarsi di dedurre dalle cognizioni che possiamo avere sulle cause degli avvenimenti, e dal numero delle prove conosciute, la probabilità da assegnarsi ad ogni grado di proclività; od almeno di dedurne la proclività più probabile, ed il suo error probabile, cioè i confini ai quali corrisponde la probabilità $\frac{1}{2}$, che sia tra essi compresa la proclività dell' avvenimento.

8. Con un esempio farò meglio conoscere l' importanza di distinguere la proclività dalla probabilità, particolarmente quando si tratti di adoperare il predetto corollario del teorema Bernoulliano. — Abbiasi un' urna contenente alcune palle, le quali possono essere indifferentemente o bianche o nere; un osservatore sappia che esse sono 3 bianche e 3 nere; ed un altro osservatore sappia soltanto che da quell' urna furono estratte (riponendo ogni volta la palla estratta) 2 palle bianche e 2 nere. Per ambedue gli osservatori la probabilità di un' estrazione bianca è $= \frac{1}{2}$; ma vi è questa essenzialissima differenza che il primo osservatore sa che $\frac{1}{2}$ è la proclività dell' estrazione bianca; mentre pel secondo osservatore la proclività $\frac{1}{2}$ è bensì la più probabile, ma egli deve ritenere probabile anche molti altri gradi di proclività; sicchè egli non dovrà giammai scommettere che in 10000 estrazioni il rapporto delle bianche alle nere sarà compreso tra $\frac{49}{51}$ e $\frac{51}{49}$; quantunque il teore-

ma del Bernoulli applicato alla proclività $= \frac{1}{2}$ dia una gran probabilità in favore di tale scommessa. (Questo osservatore sarebbe quasi certo di perdere la scommessa, se egli sapesse che le palle contenute nell' urna fossero in numero dispari, benchè anche in questo caso la probabilità dell' estrazione bianca sarebbe per lui $\frac{1}{2}$).

9. Oltre che su questa importante distinzione tra la probabilità e la proclività, vorrei rivolgere la vostra attenzione sul principio fondamentale nella teoria delle probabilità *a posteriori*, che cioè dopo avere osservato un fatto complesso, le probabilità delle varie cause, che possono averlo prodotto, sono in ragione composta delle probabilità, con cui dalle singole cause può provenire quel fatto, e delle probabilità spettanti alle cause stesse indipendentemente dal fatto osservato. Questo secondo elemento della ragione composta spesse volte si trascura, e dopo avere enumerate le cause si attribuiscono ad esse delle probabilità proporzionali semplicemente alle probabilità, con cui sono capaci di produrre l' effetto osservato. Ciò si farà più chiaro nei seguenti esempii.

10. Se da un'urna contenente 7 palle ne furono estratte, senza riporle, 2 bianche e 2 nere, le tre palle rimanenti potrebbero essere: 3 bianche, 2 bianche e 1 nera, 1 bianca e 2 nere, o 3 nere. Queste quattro ipotesi danno all'avvenimento realmente osservato le quattro probabilità $\frac{5}{7} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{21}$, $\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{35}$, $\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{35}$, $\frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{5} \cdot \frac{4}{4} = \frac{1}{21}$. E se si ammettesse il principio che le probabilità delle cause sieno proporzionali alle probabilità, con cui esse potevano dare l' avvenimento osservato, risulterebbe

che le predette ipotesi avrebbero rispettivamente le probabilità $\frac{5}{28}, \frac{9}{28}, \frac{9}{28}, \frac{5}{28}$. Questo infatti è il modo di ragionare in un caso molto analogo del Laplace (*Théorie des probabilités* 1815, pag. 183) e del Liagre (*Calcul des probabilités* 1852 pag. 99 §. 57). — Per far meglio spiccare l'assurdo a cui può condurre questo ragionamento, si supponga che le quattro palle estratte dall'urna sieno state invece 3 bianche ed 1 nera; le quattro ipotesi sulle tre palle rimanenti danno l' avvenimento osservato colle probabilità rispettive $\frac{6}{7} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{7}$, $\frac{5}{7} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{7}$, $\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{35}$, $\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{4} = \frac{1}{35}$, perlochè le probabilità delle quattro ipotesi sarebbero $\frac{5}{14}, \frac{5}{14}, \frac{3}{14}, \frac{1}{14}$, cioè sarebbe 5 volte più probabile che le 3 palle rimaste nell' urna fossero tutte bianche di quello che fossero tutte nere; il che apparisce una conseguenza ben singolare, in quanto che le palle estratte in nulla influiscono su quelle rimanenti nell' urna.

11. Quando invece si tenga conto delle probabilità spettanti *a priori* alle ipotesi si osserverà, che nell'urna potranno esservi da principio 6 palle bianche ed 1 nera, o 5 e 2, o 4 e 3, o 3 e 4, alle quali ipotesi pel teorema del Bernoulli, ammessa la proclività $\frac{1}{2}$ che ciascuna palla sia bianca, spettano rispettivamente le probabilità $\frac{7}{128}, \frac{21}{128}, \frac{35}{128}, \frac{35}{128}$; perciò dopo veduta l'estrazione di 3 bianche ed 1 nera, le quattro predette ipotesi acquisteranno le probabilità in ragion composta delle precedenti, e delle $\frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{3}{35}, \frac{1}{35}$; con cui vedemmo (§ 10) che il fatto osservato risulta

da ciascuna ipotesi. Quindi le probabilità saranno $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{8}$, cioè precisamente quelle stesse che spettano alle ipotesi, che possono farsi sui colori di tre palle; sicchè si viene per tal modo a confermare che le 4 palle estratte dall' urna nulla insegnano sul colore delle tre rimanenti.

12. La ricerca della probabilità degli avvenimenti futuri in base degli avvenimenti osservati si appoggia a mio credere sulle due osservazioni fatte precedentemente, cioè sulla distinzione tra la proclività e la probabilità, e sull'avvertenza che nel giudicare della probabilità di una causa (o di una proclività) bisogna tener conto della probabilità che essa ha per sè stessa e precedentemente alla conoscenza d'ogni suo effetto. Un esempio mostrerà come io creda che si debba procedere in tali questioni.

Da un vaso contenente un grandissimo numero di palle bianche ed altrettante nere ne sieno versate sei in un'urna; poscia da questa ne sieno estratte (riponendo ad ogni volta la palla estratta) 2 di bianche e 2 di nere; qual è la probabilità di estrarre successivamente altre due palle bianche? — La probabilità per la prima estrazione è evidentemente $\frac{1}{2}$; dopo ciò osserveremo che 5 sono le ipotesi possibili cioè che nell' urna vi sieno 5 palle bianche e 1 nera, o 4 e 2, o 3 e 3, o 2 e 4, o 1 e 5, le quali danno per l' estrazione di una palla bianca le proclività
$\frac{5}{6}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{1}{6}$. Furono in complesso estratte 3 palle bianche e 2 nere; queste fatto risulta da quelle cinque ipotesi colle probabilità rispettivamente proporzionali a 125, 256, 243, 128, 25; ma d'altronde le ipotesi hanno per loro stesse (come conseguenza della proclività $\frac{1}{2}$ spet-

tante a ciascuna palla bianca) le probabilità $\frac{6}{64}, \frac{15}{64}, \frac{20}{64}$ $\frac{15}{64}, \frac{6}{64}$, perciò le probabilità delle ipotesi dopo il fatto sono $\frac{6.125}{11520}, \frac{15.256}{11520}, \frac{20.243}{11520}, \frac{15.128}{11520}, \frac{6.25}{11520}$. Moltiplicandole per le predette proclività che esse producono, si ha per la probabilità complessiva che la sesta estrazione sia bianca la frazione

$\frac{3750+15360+14580+5840+150}{69120} = \frac{157}{288} = 0{,}545$. Nello stesso modo si trova $\frac{183}{314} = 0{,}586$ per la probabilità che sia bianca anche la 7.ª estrazione, ecc.

13. Se nel precedente esempio le cinque ipotesi, che danno i gradi di proclività $\frac{5}{6}, \frac{4}{6}, \frac{3}{6}, \frac{2}{6}, \frac{1}{6}$ si considerassero per sè stesse come ugualmente probabili, il fatto delle 5 estrazioni bianche e 2 nere darebbe ad esse le probabilità $\frac{125}{777}, \frac{256}{777}, \frac{243}{777}, \frac{128}{777}, \frac{25}{777}$. Perciò la probabilità complessiva di un' altra palla bianca sarebbe

$\frac{625+1024+729+256+25}{4662} = \frac{2659}{4662} = 0{,}5704$, che è sensibilmente maggiore della probabilità trovata nel § precedente, attribuendo alle 5 ipotesi le probabilità, che a loro realmente competono. — Nei fenomeni naturali non si saprebbe indicare quali sieno a *priori* le probabilità dei varii gradi di proclività; supponendo che da 0 ad 1 essi sieno tutti ugualmente probabili si trova che se un avvenimento è accaduto m volte ed è mancato $m' = n - m$ volte, la probabilità che esso accada un'altra volta è $\frac{m+1}{n+2}$. Nel caso presente si ha $m = 5$, $n = 5$, e la probabilità di un'altra estrazione bianca è $\frac{4}{7} = 0{,}5714$. Ma io non so scorgere

alcun motivo di fiducia in questa sorta di calcoli: nulla ci può far considerare come egualmente probabili *a priori* tutti i gradi di proclività; e l'analogia col caso concreto considerato nel § 12 ci dovrebbe indurre ad attribuire maggior probabilità alle proclività medie, e minore a quelle che si avvicinano agli estremi 0, 1.

14. Dopo aver osservati gli m casi favorevoli ad un avvenimento, e gli $n-m$ contrarii, la proclività più probabile x sarà poco differente da $\frac{m}{n}$; le proclività prossime a questa avranno per noi delle probabilità tanto più decrescenti quanto maggiore è il numero n. Si può supporre, e fu infatti supposto, che la legge di tale decrescenza di probabilità sia quella stessa che si ammette per la probabilità degli errori d'osservazione: se questa decrescenza fosse uguale dai due lati di x le due proclività in più e in meno si compenserebbero insieme in guisa che la probabilità di un nuovo avvenimento sarebbe precisamente x. Bisognerà invece supporre più probabile che la proclività differisca da x dalla parte della proclività $\frac{1}{2}$, di quello che dalla parte opposta; e ciò perchè lo spazio da quella prima parte è maggiore, e più propriamente perchè le proclività medie deggiono considerarsi *a priori* come più probabili delle estreme. — Per questi due motivi, che la proclività più probabile x è compresa tra $\frac{m}{n}$ e $\frac{1}{2}$, e che il suo error probabile è maggiore dalla parte di $\frac{1}{2}$, la probabilità di un nuovo avvenimento sarà compresa tra $\frac{m}{n}$ e $\frac{1}{2}$; che poi essa sia $\frac{m+1}{n+2}$ nulla me ne persuade. — Mi pare che soltanto uno studio accurato di una serie di fenomeni possa far conoscere quanto x

debba differire dal complessivo $\frac{m}{n}$, e quali sieno i suoi due errori probabili l'uno in più e l'altro in meno (si dice *errore probabile* quello che è tanto probabile che superi come che sia superato dall' error vero) si potrà spartire il numero n in parecchie parti corrispondenti a tempi successivi, oppure a circostanze (peraltro soltanto accessorie) tra loro differenti, ed osservare quali variazioni presenti in queste varie parti il rapporto $\frac{m}{n}$. Così per esempio, per conoscere la proclività alla nascita di un bambino o di una bambina, bisognerà rintracciare, oltre che il complessivo rapporto $\frac{m}{n}$, i rapporti parziali a tutti i singoli matrimonii che diedero più di due figli, e dedurne la proclività più probabile e i suoi due errori probabili r, r' l'uno in più e l'altro in meno; dopo di che, se per esempio si voglia stabilire la probabilità di un figlio maschio da un matrimonio che abbia procreati alcuni figli dei quali si conosca il sesso, si modificheranno le probabilità dei varii gradi di proclività moltiplicandole per le probabilità, con cui da tali gradi risulterebbe il fatto osservato.

15. Per esprimere le probabilità dei varii gradi di proclività può adoperarsi, come dicemmo, la funzione

$$\Pi(t) = \frac{2\rho}{\sqrt{\pi}} \int e^{-\rho^2 t^2}\, dt$$

essendo $\rho = 0{,}476936$; essa è tale che $\Pi(-t) = \Pi(t)$, $\Pi(0) = 0$, $\Pi(1) = \frac{1}{2}$, $\Pi(\infty) = 1$, e la sua derivata ha i valori $\Pi'(0) = \frac{2\rho}{\sqrt{\pi}} = 0{,}538$, $\Pi'(1) = 0{,}429$, $\Pi'(\infty) = 0$, ec. Le probabilità che la proclività sia compresa tra il suo valor più probabile x ed $x + t$, oppure tra x ed $x - t$, siano espresse rispettivamente da

$$\frac{r}{r+r'}\,\Pi\left(\frac{t}{r}\right)\ ,\ \frac{r'}{r+r'}\,\Pi\left(\frac{t}{r'}\right)$$

essendo r ed r' gli errori probabili, il primo in più ed il secondo in meno; sicchè vi è la probabilità $\frac{r}{2(r+r')}$ che la proclività cada tra x ed $x+r$, altrettanta che cada tra $x+r$ ed 1, la probabilità $\frac{r'}{2(r+r')}$ che cada tra x ed $x=r'$, ed altrettanta che cada tra $x=r'$ e 0. Si moltiplicarono le due funzioni Π l'una per r l'altra per r', acciocchè le loro derivate corrispondenti a $t=0$ fossero uguali; e si diede il denominatore comune $r+r'$, acciocchè la somma delle quattro predette probabilità fosse $=1$. Se un avvenimento sia accaduto m volte in n prove, e se non abbiasi alcun dato precedente a tali prove la più probabile proclività di quell'avvenimento sarà $\frac{m}{n}$.

La probabilità poi con cui una proclività $\left(\frac{m}{n}+t\right)$ pochissimo differente dalla precedente produrrebbe il fatto osservato è proporzionale a

$$\left(\frac{m}{n}+t\right)^m\left(\frac{m'}{n}-t\right)^{m'}\qquad(\text{essendo } m'=n-m)$$

ossia proporzionale a

$$\left(1+\frac{nt}{m}\right)^m\left(1-\frac{nt}{m'}\right)^{m'}=$$

$$=\left(1+nt+\frac{m-1}{2m}n^2t^2\right)\left(1-nt+\frac{m'-1}{2m'}n^2t^2\right)=$$

$$=1-\frac{n^3t^2}{2mm'};$$

dunque se si voglia ritenere che prima dell'esperimento tutti i gradi di proclività fossero egualmente probabili, e dopo l'esperimento la probabilità della proclività $\frac{m}{n}+t$ sia espressa dalla predetta funzione derivata $\frac{1}{2r}\Pi'\left(\frac{t}{r}\right)$, per

determinare la costante r in essa contenuta bisognerà eguagliare i due primi termini $1 - \frac{n^3 t^2}{2mm'}$ del precedente sviluppo in serie collo sviluppo $1 - \frac{\rho^2 t^2}{r^2}$ di e $^{-\frac{\rho^2 t^2}{r^2}}$; così si avrà l'error probabile della proclività espresso da

$$r = \rho \sqrt{\frac{2mm'}{n^3}}.$$

Ma come già lo dissi, questi calcoli non potranno destare alcuna fiducia se non che nel caso che m m' sieno poco tra loro differenti, e che assolutamente ci manchi ogni motivo per giudicare *a priori* della proclività.

16. Un esempio dei gravissimi errori, a cui si può andar incontro stabilendo la probabilità su pochi fatti osservati senza tener conto delle probabilità, che precedentemente a tali fatti si dovevano attribuire ai varii gradi di proclività, ce lo presenta il Liagre (§ 64, pag. 108). Se un dado, egli dice, ha dato quattro volte di seguito lo stesso punto, si ha la probabilità $\frac{5}{9}$ di avere lo stesso punto altre quattro volte di seguito. — Prima del fatto la proclività più probabile era $\frac{1}{6}$, e per quanto il dado si supponga costrutto grossolanamente, credo di accordar più del giusto supponendo che tale proclività $x = \frac{1}{6}$ ammetta in più un error probabile $r = 0{,}02$ e in meno di $r' = 0{,}005$. Poniamo accanto a ciascun grado successivo $x + t$ di proclività la sua probabilità, che supponiamo espressa dalla formula del § precedente, e che è perciò $\frac{1}{0{,}025}\ \Pi'\left(\frac{t}{r}\right)$; sarà $(x + t)^4$ la probabilità con cui quella proclività dà la riproduzione per quattro volte dello stesso punto; facendo il prodotto si ha la probabilità di ciascun grado di

proclività; poi tornando a moltiplicare per $(x+t)^4$ si ha la probabilità dell'avvenimento che si aspetta (e che è la ripetizione dell'osservato). Le somme danno approssimatamente gli integrali; così la probabilità che il dado torni a dare per quattro volte lo stesso punto sarà

$$\frac{1,866}{1225}=0,0015$$

anzichè $\frac{8}{9}$.

$x+t$	$40\,\Pi'\left(\frac{t}{r}\right)$	$(x+t)^4$	Probabilità della proclività	Probabilità dell'avvenimento
0,1467	0,5	0,00046	2	0,001
0,1567	8,6	60	52	,051
0,1667	21,5	77	166	128
0,1767	20,5	97	197	191
0,1867	16,2	,00121	196	237
0,1967	12,9	150	194	291
0,2067	8,6	183	157	287
0,2167	5,2	221	114	252
0,2267	2,8	264	74	195
0,2367	1,2	314	58	119
0,2467	0,5	370	19	070
0,2567	0,2	434	9	039
0,2667	0,1	,00506	5	0,025
Integrali	98,6		1225	1,866

17. Talvolta si prende per probabilità una proclività dipendente da un gran numero di fatti, senza porre a calcolo quelle conoscenze speciali intorno al caso che si considera, le quali dovrebbero essenzialmente modificare il nostro giudicio. Così se si trattasse di apprezzare la vita

probabile di un uomo, di cui conosciamo la sola età, noi dovremmo fondarsi sulle tavole di mortalità; ma se si tratti di una persona che noi conosciamo, e che, per esempio, si presenta per fare un contratto vitalizio, dobbiamo attribuirle una vita probabile sensibilmente maggiore; giacchè quella persona si trova in uno stato di salute molto migliore del medio di tutti i suoi coetanei, alcuni dei quali si troveranno più o meno gravemente malati. Così il Buffon considerò come una probabilità moralmente trascurabile quella, che è inferiore a un decimo di millesimo, tale essendo, secondo lui, la probabilità per un uomo di 56 anni di morire prima del termine di 24 ore; ma invece questa probabilità in istato di salute è molto minore della predetta, quale fu dedotta dalle tavole di mortalità.

18. Il fondamento della teoria degli errori d'osservazione io lo credo piuttosto un fatto convalidato dall'esperienza, che una conseguenza dei principii teorici della probabilità. È ben naturale di supporre che quando con una certa accuratezza si fa un'osservazione, un errore sia molto meno probabile quanto più esso è grande, e divenga impossibile oltre due ristretti confini; ma non credo che si potrà mai stabilire *a priori* la disposizione che molte osservazioni andranno a prendere intorno al valore esatto, accumulandosi vicino ad esso, e rapidamente diradandosi a qualche distanza dal medesimo sì da un lato che dall'altro. Si trova che bastantemente corrisponde col fatto l'ammettere che il rapporto al numero totale delle osservazioni del numero di quelle il cui errore cade tra $-t$ e t sia espresso dalla funzione (§ 15) $\Pi\left(\frac{t}{r}\right)$; essendo r una costante che varia da un sistema ad un altro di osservazioni e dicesi il loro *error probabile.*

19. Prima di fare un' osservazione sul modo con cui si suole determinare l'error probabile del risultamento di alcune osservazioni, riporterò alcune facili conseguenze della predetta supposizione. Il numero delle osservazioni che hanno l'errore t, è proporzionale alla derivata

$$\frac{1}{2r}\Pi'\left(\frac{t}{r}\right);$$

(la derivata della $\Pi\left(\frac{t}{r}\right)$ è $\frac{1}{r}\Pi'\left(\frac{t}{r}\right)$, se ne prende la metà perchè si considerano soltanto gli errori positivi, e per la stessa ragione si prenderà poi $\frac{1}{2}\Pi\left(\frac{t}{r}\right)$ come proporzionale al numero di tutte le osservazioni positive) moltiplicando per tdt, poscia integrando da 0 a $+\infty$ si ottiene $\frac{r}{2\rho\sqrt{\pi}}$, dal che si ricava che la somma degli errori positivi divisa egualmente tra tutte le corrispondenti osservazioni dà *il medio aritmetico* degli errori $=\frac{r}{\rho\sqrt{\pi}}=r.\,1{,}183$. — Moltiplicando la predetta derivata per t^2dt, poi integrando da $-\infty$ a $+\infty$ si trova che la somma dei quadrati degli errori divisa pel numero delle osservazioni ha il valore $=\frac{r^2}{2\rho^2}$, a cui (prendendo a prestito una parola dalla teoria dei momenti d'inerzia) potremo dare il nome di *momento medio*. La radice del *momento medio* $\varepsilon=\frac{r}{\rho\sqrt{2}}=r\,1{,}483$ suol dirsi l'*errore medio*; esso è l'errore di una osservazione il cui momento eguaglierebbe il momento medio. Dicesi *peso* una quantità inversamente proporzionale al momento, ossia inversamente proporzionale al quadrato dell'error probabile r.

20. Supponiamo ora che di una incognita x si sieno determinate direttamente le n grandezze g_1, g_2, ...g_n,

e queste osservazioni, senza troppo discostarsi dalla supposta distribuzione delle osservazioni (poichè se decisamente se ne scostassero non mi pare che sarebbe opportuno applicare un' ipotesi ad un fatto che la smentisse) non sieno tanto numerose e tanto simmetricamente disposte da far conoscere a colpo d'occhio qual è il valore x, dal quale esse si allontanano per effetto delle cause accidentali d'errore: vediamo come se ne possa dedurre il più probabile valore della x ed il suo error probabile R, cioè quei limiti $x - R$, $x + R$, pei quali, secondo le nostre cognizioni, vi è la probabilità $\frac{1}{2}$ che cadrà il valore dell' incognita. — Supponiamo che le fatte osservazioni formino parte di quel sistema, che ha il valore esatto x e l'error probabile r: in questo sistema la probabilità che un' osservazione dia un valore compreso tra g_1 e $g_1 + dt$ è

$$\frac{\rho}{r\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\rho^2}{r^2}(g_1 - x)^2} dt$$

dunque la probabilità composta spettante a tutte le n osservazioni, che realmente ebbero luogo è proporzionale a

$$\frac{1}{r^n} e^{-\frac{\rho^2}{r^2}\Sigma(g - x)^2}$$

essendo

$$\Sigma(g - x)^2 = (g_1 - x)^2 + (g_2 - x)^2 \ldots + (g_n - x)^2.$$

E siccome noi non abbiamo alcun motivo per preferire *a priori* un valore di x ad un altro, così la probabilità di ciascun valore ipotetico di x è proporzionale alla probabilità, con cui dalla ipotesi risulta il fatto osservato. Ora la predetta probabilità è massima quando $\Sigma(g - x)^2$ è minima, cioè quando $\Sigma(g - x) = 0$, ossia $x = \frac{1}{n}\Sigma g$. Dunque il valor più probabile delle x eguaglia il medio aritmetico delle osservazioni.

21. Dalla evidenza di questa conclusione alcuno volle dedurre la verità dell'ipotesi (§ 18), con cui vi si giunge. A me non sembra che *a priori* fosse da darsi una decisa preferenza al medio aritmetico, poichè poteva obbiettarsi che in questo modo ad una osservazione si dà tanto maggior importanza quanto più essa si discosta dalle altre, cioè quanto più è inesatta; potevasi credere che il valor più probabile fosse quello, pel quale tante sono le osservazioni inferiori ad esso quanto le superiori.

22. Dopo avere stabilito il valor più probabile x, che noi per ispeditezza di calcolo supporremo nullo, ponendo perciò $\Sigma g = 0$, si crede poterne dedurre il valore di r ragionando nello stesso modo (§ 20), cioè attribuendo ad r quel valore, che rende massima la predetta probabilità composta

$$\frac{1}{r^n} e^{-n \frac{\rho^2}{r^2}(M^2+x^2)}$$

avendo posto $\Sigma g^2 = n M^2$. Ma qui non è vero che *a priori* sieno ugualmente probabili tutti i valori di r, e perciò secondo quanto si disse al § 9, la probabilità di un valore di r è in ragione composta della sua probabilità anteriore ad ogni osservazione, e della probabilità con cui da quella ipotesi risulterebbe il fatto realmente osservato. D'altronde quando si conoscono le osservazioni $g_1, g_2 \ldots$ e si è già stabilito che il vero valore sia $x = 0$, ne viene di conseguenza che la media del loro momento medio sia $= \sqrt{\left(\frac{1}{n} \Sigma g^2\right)} = M$, e siccome coll'ammesso principio (§ 18) l'error probabile è legato colla radice del *momento medio* dall'equazione del (§ 19) così sarà $r = \rho \sqrt{2}\, M$. Questo valore è del resto lo stesso, a cui si perviene cercando di render massima la predetta probabilità composta.

25. Ma io non mi accordo egualmente colle formule generalmente adottate quando si tratta di determinare l'error probabile R del valore $x = \Sigma g = 0$. La probabilità che il valore cercato sia compreso tra x e $x + dx$ è proporzionale a

$$\frac{1}{rn} e^{-n \frac{\varepsilon^2}{r^2} (M^2 + x^2)} dx ,$$

dove $r = \rho \sqrt{2}\, \varepsilon$, essendo ε la radice del *momento medio* delle osservazioni, il quale dedotto dalle n osservazioni riferite al supposto valore esatto x è

$$\varepsilon = \sqrt{\left(\frac{1}{n} \Sigma (g - x)^2\right)} = \sqrt{(M^2 + x^2)} .$$

Sostituendo il corrispondente valore di $r = \rho \sqrt{2}\, \varepsilon$ nel predetto esponenziale esso diviene costante, e perciò la probabilità è proporzionale a

$$(M^2 + x^2)^{-\frac{n}{2}} dx = M^{n-1} \cos^{n-2} \varphi \, d\varphi$$

essendo $\varphi = A\mathrm{tg} \frac{x}{M}$, $x = M \mathrm{tg}\, \varphi$.

Quindi la probabilità che x cada tra $-R$ e R sarà

$$\int_\varphi^0 \cos^{n-2} \varphi \, d\varphi : \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^{n-2} \varphi \, d\varphi$$

essendo $R = M \mathrm{tg} \varphi$; e se determineremo R in modo che il predetto rapporto dei due integrali sia $= \frac{1}{2}$, sarà R l'error probabile di $x = \Sigma g = 0$.

Così l'error probabile di x si trova

per $n = 2$ $\qquad R = M \mathrm{tg} \frac{\pi}{4} = M$

per $n = 3$ $\qquad R = M \mathrm{tg} \frac{\pi}{6} = M . 0{,}577$

per $n = 4$ $\qquad R = M \, 0{,}442$

per $n = 5$ $\qquad R = M \, 0{,}373$

24. Se invece all'error probabile r delle osservazioni si attribuisse lo stesso valore, qualunque sia quello di x, la probabilità che il valor cercato sia compreso tra x e $x + \mathrm{d}x$ sarebbe proporzionale a

$$\frac{1}{r^n}\, e^{-n\frac{\rho^2}{r^2}(M^2+x^2)}\mathrm{d}x \text{ ossia a } e^{-n\frac{\rho^2}{r^2}x^2}\mathrm{d}x = e^{-\frac{\rho^2}{R^2}x^2}\mathrm{d}x.$$

Perciò la probabilità degli errori di $x = \Sigma g = 0$ seguirebbe precisamente la stessa legge, che abbiamo supposto (§ 18) appartenere alle osservazioni, e l'error probabile di x sarebbe

$$R = \frac{r}{\sqrt{n}}$$

cioè uguale a quello delle osservazioni diviso per la radice del loro numero. A me non sembra ragionevole di attribuire all'error probabile r lo stesso valore qualunque sia il supposto valore esatto, poichè è certo che il *momento* delle osservazioni è maggiore quando si suppone che il valore esatto di x sia differente da Σg; si viene in parte a rimediare a ciò ponendo nella $\varepsilon^2 = M^2 + x^2$ $x^2 = \frac{1}{n}\varepsilon^2$ il che dà alla *radice del momento medio* il valore

$$\varepsilon = \sqrt{\left(\frac{n}{n-1}\right)}\, M, \text{ dopo di che è (§ 19)}$$

$$r = \rho \sqrt{\left(\frac{2\,n}{n-1}\right)}\, M \text{ ed}$$

$$R = \rho \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}}\, M,$$

che dà per $n = 2$ $\quad R = M.\,0{,}674$
per $n = 3$ $\quad R = M.\,0{,}477$
per $n = 4$ $\quad R = M.\,0{,}339$
per $n = 5$ $\quad R = M.\,0{,}337.$

25. La prudenza suggerisce di prender per R il maggiore dei valori, che può arguirsi o dalla natura delle os-